Aufgaben zum Vorkurs Mathematik

für Mathematiker
vor dem WS 2025/26

Samuel Adeosun, Peter Pfaffelhuber
Universität Freiburg

15. September 2025

Falls Sie diese Aufgaben entdecken, bevor der Vorkurs beginnt: Wie wäre es damit, wenn Sie sich schon mal an eine der Knobelaufgaben versuchen würden? Diese werden als Hausaufgabe für die ganze Woche am Donnerstag nachmittag in den Übungen besprochen. Die restlichen Aufgaben werden als Präsenzübung in den Übungen von Montag bis Mittwoch nachmittag besprochen.

Pflichtaufgaben sind mit * markiert.

Knobelaufgabe für die ganze Woche

1. Seien α und n natürliche Zahlen. Wir betrachten die Aussage:

$$\mathcal{A}(n,\alpha): \text{ Zwischen } 10\alpha \text{ und } 10\alpha + 100 \text{ liegen nicht mehr als } n \text{ Primzahlen..}$$

   Finden Sie n so klein wie möglich ist und einen Beweis dafür, dass $\mathcal{A}(n,\alpha)$ für alle $\alpha > 0$ gilt.

   Hinweis: Als ersten Schritt finden Sie am besten einen Beweis dafür, dass $\mathcal{A}(50,\alpha)$ für alle $\alpha > 1$ gilt.

   Hinweis: Hier sind alle Primzahlen unter 200:
   2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199
   Für $\alpha = 2$ ergeben sich die Primzahlen $23, ...113$, also 22 Stück.

2. Fünf Häuser stehen in einer Reihe und tragen, von links nach rechts gelesen, die Hausnummern 1 bis 5. Jedes Haus hat eine andere Farbe. In jedem Haus wohnt eine einzige Familie. Die Nationalitäten der Familien sind verschieden. Jede Familie bevorzugt ein bestimmtes Getränk, eine bestimmte Speise, und hält ein bestimmtes Haustier.

   Die Farben sind: blau, gelb, grün, rot, weiss.
   Die Nationalitäten sind: Deutschland, Schweiz, Frankreich, Österreich, Polen.
   Die Getränke sind: Bier, Kaffee, Milch, Tee, Wasser.
   Die Speisen sind: Kartoffelauflauf, Nudeln, Reis, Gemüsesuppe, Rindsfilet.
   Die Haustiere sind: Fisch, Hund, Katze, Pferd, Vogel.

Folgendes ist bekannt:

(a) Die französische Familie wohnt im roten Haus.
(b) Die polnische Familie hält einen Hund.
(c) Die Familie aus der Schweiz trinkt gerne Tee.
(d) Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
(e) Die Familie im grünen Haus trinkt gerne Kaffee.
(f) Die Liebhaber von Reis halten einen Vogel.
(g) Die Familie im mittleren Haus trinkt gerne Milch.
(h) Die Familie im gelben Haus isst gerne Kartoffelauflauf.
(i) Die Nudel-Liebhaber wohnen neben den Katzenhaltern.
(j) Die Pferdebesitzer wohnen neben den Liebhabern von Kartoffelauflauf.
(k) Die Liebhaber von Rindsfilets trinken gerne Bier.
(l) Die österreichische Familie wohnt im ersten Haus.
(m) Die österreichische Familie wohnt neben dem blauen Haus.
(n) Die deutsche Familie mag Gemüsesuppe.
(o) Die Nudel-Liebhaber haben Nachbarn, die gerne Wasser trinken.

Wem gehört der Fisch?
(Antwort mit Herleitung, d.h. einer Auflistung aller logischen Schlussfolgerungen.)

Rechenaufgaben

1.* Untersuchen Sie im folgenden wann die Terme definiert sind und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(a) $\dfrac{2\alpha+\alpha^2-1}{2\alpha^2-2}$

(b) $\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha(\alpha-\beta)}+1$

(c) $\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}\,\dfrac{-\beta}{\gamma\alpha}\,\dfrac{(\gamma-\beta)\gamma}{\beta}$

(d) $\dfrac{\alpha^{\zeta+2}\beta^{\eta}\gamma^{\theta-1}}{\gamma^{-1}\alpha^2\beta^{\eta-2}}$

(e) $\dfrac{1}{\alpha^{\eta}\beta^{\eta-4}} - \dfrac{4}{\alpha^{\eta-1}\beta^{\eta-3}} + \dfrac{6}{(\alpha\beta)^{\eta-2}} - \dfrac{4}{\alpha^{\eta-3}\beta^{\eta-1}} + \dfrac{1}{\alpha^{\eta-4}\beta^{\eta}}$

(f) $\sqrt[3]{\left(\dfrac{4\alpha^2}{\beta^2}\right)^{\theta}}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{16\alpha}{\gamma^3\beta}\right)^{\theta}}$

(g) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}}{\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}}$

(h) $\sqrt[2]{\alpha^6\sqrt[5]{\alpha^4\sqrt[3]{\alpha^2\sqrt[4]{\alpha}}}}$

(i) $\frac{1}{2}\ln(\alpha+\beta)-\frac{1}{2}\ln(\alpha^2-\beta^2)+\frac{1}{2}\ln(\alpha-\beta)$

(j) $\ln(\ln(\ln(\ln(e^{e^{e}}))))$

2.* Für welche $\mu,\nu\in\mathbb{R}$ gilt $(\mu,\nu)^2=\mu^2+\nu^2$?

3.* Für welche $\xi,\eta,\lambda,\rho\in\mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\xi}{\lambda}+\frac{\eta}{\rho}=\frac{\xi+\eta}{\lambda+\rho}?$$

4.* Berechnen Sie die Ableitung von $x\mapsto x^x$.

5.* Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit differenzierbarer Umkehrfunktion f^{-1}. Berechnen sie allgemein die Ableitung von f^{-1}.
Hinweis: Man beachte, dass immer $f(f^{-1}(x))=x$ gilt!

Aufgaben zu Kapitel 2

1. Seien $\mathcal{A},\mathcal{B}$ Aussagen. Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen $\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\Rightarrow\mathcal{A}$ und $\neg(\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}) \iff (\neg\mathcal{A}\vee\neg\mathcal{B})$.

2.* Seien $\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ Aussagen, die von der freien Variablen x abhängen. Welche Gleichheiten sind richtig, welche falsch. In welchen Fällen gilt wenigstens "$\Rightarrow$" oder "$\Leftarrow$" anstatt "$\iff$"?

(a) $((\exists x:\mathcal{A}(x))\wedge(\exists x:\mathcal{B}(x))) \iff (\exists x:\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{B}(x))$

(b) $((\forall x:\mathcal{A}(x))\wedge(\forall x:\mathcal{B}(x))) \iff (\forall x:\mathcal{A}(x)\wedge\mathcal{B}(x))$

(c) $((\exists x:\mathcal{A}(x))\vee(\exists x:\mathcal{B}(x))) \iff (\exists x:\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B}(x))$

(d) $((\forall x:\mathcal{A}(x))\vee(\forall x:\mathcal{B}(x))) \iff (\forall x:\mathcal{A}(x)\vee\mathcal{B}(x))$

3.* Negieren Sie folgende Aussagen:

$$\exists a,b,c,n\in\mathbb{N}:(n>2)\wedge(a^n+b^n=c^n),$$
$$\forall a\in\{2,3,4,...\}\ \ \exists p,q\in\mathbb{N}:(p,q\text{ prim})\wedge(2a=p+q),$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ \exists p\in\mathbb{N}:(p>n)\wedge(p\text{ prim})\wedge(p+2\text{ prim}).$$

4. Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.
   Gilt auch die Umkehrung, d.h. finden Sie Argumente für oder gegen folgende Aussage:
   Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \notin \mathbb{Q}$. Dann ist p prim.

5. Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} &A \setminus (B \setminus A) = A, \\ &(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C), \\ &A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

6. Seien A, B Mengen. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

$$\text{(i) } A \subseteq B \qquad \text{(ii) } A \cap B = A \qquad \text{(iii) } A \cup B = B.$$

7.* Erstellen Sie ein Venn-Diagramm für das Haus der Vierecke. Es gibt folgende spezielle Vierecke: Quadrat, Rechteck, Drachenviereck, Trapez, gleichschenkliges Trapez, Parallelogramm, Raute, Sehnenviereck[1], Tangentenviereck[2].

[1] Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, bei dem alle vier Ecken auf einem Kreis liegen.
[2] Ein Tangentenviereck ist ein Viereck, bei dem es einen Kreis gibt, der alle vier Seiten berührt.

Aufgaben zu Kapitel 3

1. Für welche $x \in \mathbb{C}$ ist die Darstellung in Polarkoordinaten nicht eindeutig?
2. Wieviele $x \in \mathbb{C}$ gibt es mit $x \cdot x = -1$?
3. Gibt es zu jedem $z \in \mathbb{C}$ ein $\bar{z}$, so dass $z \cdot \bar{z} = 1$? Geben Sie für $z \simeq \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$ die Polarkoordinaten von $\bar{z}$ an.
4. Für $x \in \mathbb{C}$ sei $|x|$ der Abstand zum Ursprung. Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
5. Beweisen Sie Lemmas 3.2 und 3.3.
6. Erklären Sie anhand einer Skizze das zweite Additionstheorem aus Proposition 3.4.
7.* Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \arctan x$.
   HINWEIS: Bedenken Sie, dass arctan die Umlehrfunktion von tan ist, und verwenden Sie Rechenaufgabe 5.

Aufgaben zu Kapitel 4

1. Begründen Sie für $x_0, x_1, ... \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k}, \qquad \sum_{k=i}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n-i} x_{k+i}.$$