

## **Tail behaviour and martingale convergence of random recursive structures and algorithms**

Thema und Intention dieser Arbeit ist es, Methoden zu entwickeln und weiter zu entwickeln, die es erlauben, eine große Fülle wichtiger Algorithmen genauer zu beschreiben als es bisher möglich war.

### **Stochastische und 'worst-case' Analyse von Algorithmen**

Das Ziel der stochastischen Analyse von Algorithmen ist es, das typische Verhalten von Algorithmen und ihrer relevanten Kenngrößen zu beschreiben. Anfänge dieser stochastischen Analyse gehen auf das für die Entwicklung der Computer Science fundamentale Werk von Karp (1972) zurück, in dem er die Bedeutung der 'average-case Analyse' beschreibt und für eine Reihe wichtiger Beispiele aus der Informatik, wie allgemeine Such- und Sortieralgorithmen, eine solche Analyse durchführt. Im Unterschied zu der klassischen 'worst-case Analyse', die sich auf die Ermittlung des schlimmsten Falles konzentriert, liefert die stochastische Analyse ein viel genaueres und differenzierteres Bild des Verhaltens von Algorithmen. Dies größere Aussagekraft der Analyse wird ermöglicht durch ein stochastisches Datenmodell oder auch durch stochastische (d.h. zufällige) Elemente in der Durchführung der Algorithmen (randomisierte Algorithmen), die es erlauben, Eigenschaften des Algorithmus im gesamten Suchraum zu beschreiben. Es gibt eine große Fülle neuerer und wichtigere Anwendungen der stochastischen Analyse wie zum Beispiel bei der stochastischen Netzwerkanalyse von Internetmodellen, von biologischen Netzwerken oder von Lösungen kombinatorischer Optimierungsprobleme. Konkrete Anwendungen sind etwa optimale Einsatz- und Routenpläne für Transport und Verkehr (Bahn- und Nahverkehrsbetriebe).

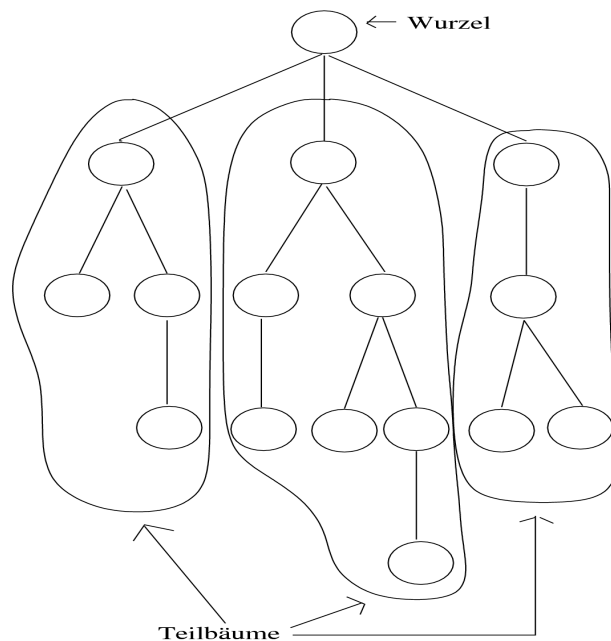
### **Rekursive Algorithmen und zufällige Bäume**

Ein großer Teil von Algorithmen trägt in sich eine innere 'rekursive Struktur'. Dieses ist insbesondere der Fall für Algorithmen vom 'divide and conquer Typ'. Ein großes Optimierungsproblem wird in eine bestimmte Anzahl kleinerer Teilprobleme aufgeteilt. Lösungen der Teilprobleme können dann geeignet kombiniert werden und mit einem zusätzlichen Aufwand (toll) zu einer Lösung des Gesamtproblems erweitert werden. Dieser rekursive Vorgang kann durch einen zufälligen Baum beschrieben werden mit zufälligen Teilbaumgrößen, die der Größe der Teilprobleme entsprechen.

Das Verhalten des Algorithmus kann dann durch ein geeignetes Funktional des zufälligen Baumes beschrieben werden. So ist zum Beispiel beim Sortieralgorithmus Quicksort die interessante Anzahl der notwendigen Vergleichsschritte, die der Algorithmus benötigt, identifizierbar mit der Summe aller Knotendistanzen zur Wurzel. Zur Analyse solcher zufälligen Baumstrukturen und allgemeinerer Typen von Algorithmen sind in den letzten 15-20 Jahren eine Reihe neuer stochastischer Methoden entwickelt worden, die wesentlich auf Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie aufbauen. Für die vorliegende Arbeit waren dies insbesondere eine 'Martingalmethode' und die 'Kontraktionsmethode', die beide für das Gebiet der stochastischen Analyse von Algorithmen einen grundlegenden Fortschritt brachten.

### **Meine Arbeit**

Das 'tail' Verhalten eines Algorithmus beschreibt die Wahrscheinlichkeit für große



Abweichungen von der Erwartung bzw. dem Mittelwert dieses Algorithmus und ist somit eng mit Auftreten von 'worst-case' Szenarien verbunden. Wünschenswert ist daher ein schneller Abfall der 'tail' Wahrscheinlichkeiten und damit eine hohe Konzentration um den Erwartungswert herum. Im ersten Teil der Arbeit untersuchen wir exponentielle und polynomielle tail Schranken für zufällige rekursive Strukturen und Algorithmen und geben verschiedene Kriterien an um das tail Verhalten zu bestimmen. Die Aussagen werden mittels Induktion bewiesen. Damit konnten wir bestehende Resultate über exponentielle tail Schranken verbessern, ergänzen und erstmals leicht zu verifizierende Kriterien für obere polynomiellen tail Schranken angeben. Im zweiten Teil der Arbeit beweisen wir einen funktionalen Grenzwertsatz für die geeignet normierten Profile von verschiedenen zufälligen Bäumen, wie sie etwa bei der Darstellung rekursiver Algorithmen auftreten. Das Profil eines Baumes gibt für jedes Level bzw. für jede Generation im Baum die Anzahl der Knoten des jeweiligen Levels an und ist damit eine aussagekräftige Kennzahl der äußeren Gestalt des Baumes und liefert wichtige Informationen über das Verhalten des zugrunde liegenden Algorithmus. Das Resultat wird gezeigt, indem wir eine Einbettung dieser diskreten Bäume in ein zeitstetiges gewichtetes Baummodell vornehmen und einen Zusammenhang mit der Konvergenz geeigneter Martingale herstellen. Für die Profile einiger Baumtypen konnten erstmals Konvergenzresultate angegeben werden. Für bereits untersuchte Baumtypen, wie etwa dem zufälligen binären Suchbaum, wurden die Konvergenzresultate im Vergleich zur Kontraktionsmethode verbessert. Der Vorteil der Martingalmethode gegenüber etwa der Kontraktionsmethode ist, dass wir fast sichere Konvergenz der Profile im kompletten interessanten Bereich erhalten anstatt nur Verteilungskonvergenz in einem Teilbereich. Der dritte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit dem Nachweis von polynomiell tail Verhalten für die in Teil zwei verifizierten Grenzverteilungen der Profile des zufälligen binären Suchbaums und des zufälligen rekursiven Baums. Dazu benutzen wir die Verbindung von bestimmten relevanten Kenngrößen der Profile mit der Theorie von Differential-Differenzen-Gleichungen.