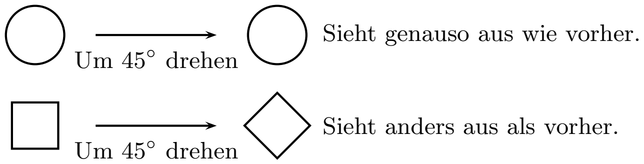
Kategorielle Langlands-Korrespondenz für die verallgemeinerten Lorentz-Gruppen

Das Ziel der Arbeit war es, die so genannte „kategorielle Langlands-Korrespondenz“ besser zu verstehen. Dabei handelt es sich um eine bisher noch wenig verstandene Vermutung über eine Verbindung zwischen „Darstellungen“ und „kohomologischen Strukturen“. Zunächst sollten diese Wörter erklärt werden.

Was ist eine „Darstellung“?

Anschaulich kann man eine Darstellung auffassen als die Beschreibung einer möglichen „Symmetrie“. Das heißt, eine Darstellung gibt an, wie man ein Objekt drehen oder spiegeln kann, so dass es danach genauso aussieht wie vorher. Egal, wie man zum Beispiel einen Kreis dreht oder spiegelt, er sieht immer genauso aus. Ein Quadrat hingegen kann man nur spiegeln oder in 90°-Schritten drehen, wenn es genauso aussehen soll wie vorher, den Buchstaben „S“ kann man nur um 180° drehen (und nicht spiegeln) und den Buchstaben „T“ nur spiegeln. Dem Kreis, dem Quadrat, dem „S“ und dem „T“ entsprechen also vier verschiedene Darstellungen. Dem Buchstaben „U“ hingegen entspricht die gleiche Darstellung wie dem „T“.[1]



Das waren Beispiele von Symmetrien in der Ebene. Das entsprechende kann man aber auch im Raum machen (mit Kugeln, Backsteinen, Pyramiden, etc.) oder in noch höheren Dimensionen. Für die Quantenphysik ist es z. B. wichtig, Symmetrien in der Raumzeit zu verstehen, also in einem vierdimensionalen Raum, bei dem sich aber eine der Dimensionen – die Zeit – anders verhält als die drei anderen.

Was sind „kohomologischen Strukturen“?

Die „Kohomologie“ eines Objekts beschreibt anschaulich die „Löcher“, die das Objekt hat. Dabei geht es nur um die Anzahl und die „Art“ der Löcher – nicht um deren genau Form. Genauer: Zwei Objekte haben die gleiche Kohomologie, wenn man das eine in das andere „umkneten“ kann, ohne irgend wann etwas zu zerreißen oder ein Loch zuzudrücken.

Wieder ein paar Beispiele: Ein Glas kann man in einen Teller umformen, indem man die Seitenwände runterbiegt und nach außen zieht. Sie haben also die gleiche Kohomologie.

Eine Tasse mit Henkel hat eine andere Kohomologie als ein Glas: Um aus der Tasse ein Glas zu machen, müsste man irgendwann den Henkel durchschneiden oder das Loch zudrücken. Anders ausgedrückt: Der Henkel der Tasse bildet ein Loch, und das Vorhandensein dieses Lochs kann man an der Kohomologie ablesen.

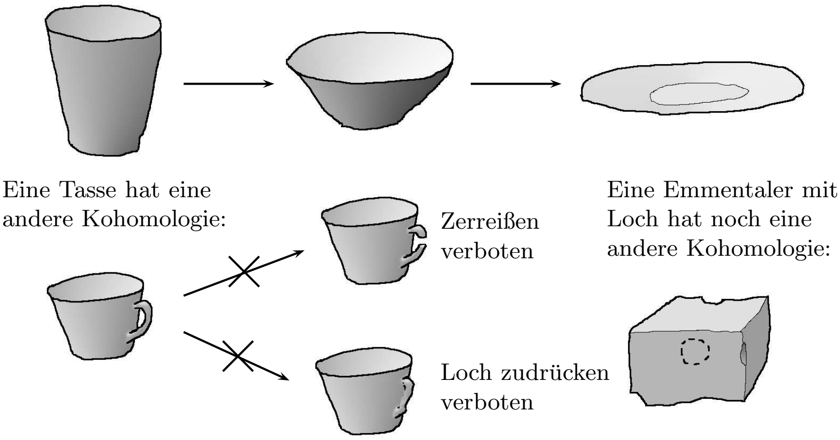
Ein Donut hat auch ein Loch und damit die gleiche Kohomologie wie eine Tasse. Es gibt aber auch andere Arten von Löchern, z. B. die im Inneren eines Klotzes Emmentaler. Durch das Tassenloch kann man hindurchgreifen; das Emmentaler-Loch hingegen ist eine Blase, die von allen Seiten von Emmentaler eingeschlossen ist. Emmentaler-Löcher kann man nicht in Tassenlöcher verformen; aus Sicht der Kohomologie sind dies also verschiedene Dinge.

Die Langlands-Korrespondenz

Ein wichtiges Arbeitsgebiet der reinen Mathematik ist das so genannte Langlands-Programm. Die ursprüngliche Motivation für dieses Projekt, das 1967 von Robert Langlands initiiert wurde, waren zahlentheoretische Probleme wie z. B. Verallgemeinerungen der Frage, welche Ziffern als letzte Ziffer einer Quadratzahl möglich sind. (Verallgemeinerungen sind z. B.: Was passiert, wenn man Kubikzahlen nimmt, was, wenn man in einem anderen Zahlensystem als dem 10er-System arbeitet, etc.)

[1] Genauer gesagt ist das, was ich hier beschreibe nicht nur eine Darstellung sondern eine „Gruppe zusammen mit einer treuen Darstellung“.

Ein Becher und ein Teller haben die gleiche Kohomologie:



Schließlich wurde ein ganzes Netz von Vermutungen aufgestellt, denen nicht mehr so leicht anzusehen ist, was sie mit dem ursprünglichen Problem zu tun haben. Bis heute konnte nur ein kleiner Teil dieser Vermutungen bewiesen werden, und teilweise ist noch nicht einmal bekannt, wie die genaue Formulierung der Vermutungen lauten sollte. Eine der Vermutungen besagt, dass es eine starke Beziehung geben sollte zwischen „Darstellungen“ und „Kohomologien“, also zwischen Beschreibungen von Symmetrien und Beschreibungen von Löchern. Diese Beziehung sollte es erlauben, aus einem gegebenen Objekt nach einer komplizierten Vorschrift ein anderes zu konstruieren, so dass man aus den Löchern des zweiten Objekts Informationen über die Symmetrien des ersten Objekts erhalten kann und umgekehrt. Diese Beziehung ist es, die man die „kategorielle Langlands-Korrespondenz“ nennt.

Es ist ein großes, bisher nur teilweise gelöstes Problem der Mathematik, alle möglichen Darstellungen zu verstehen, d. h. welche es überhaupt gibt und was sie für Eigenschaften haben. Sollte sich die Langlands-Korrespondenz als richtig erweisen, dann gäbe es einen neuen Ansatz, um Symmetrien zu verstehen: Man könnte statt dessen Kohomologien untersuchen und die Ergebnisse auf die Symmetrien übertragen.

Wissensstand und meine Arbeit

Es gibt verschiedene Versionen der Langlands-Korrespondenz. Die oben beschriebene „kategorielle Langlands-Korrespondenz“ ist die stärkste Fassung. Es gibt auch eine schwächere Version, bei der anstelle der kohomologischen Strukturen andere mathematische Objekte verwendet werden; diese liefern jedoch deutlich weniger Information über die Symmetrien als die kohomologischen Strukturen. In den Fällen, für die ich mich interessiert habe, wird eine solche schwächere Form in [ABV92] bewiesen.

In [Soe01] wird eine starke Version der Langlands-Korrespondenz als Vermutung formuliert und in einigen sehr einfachen Beispielen überprüft. Dass man aber bei dieser starken Version aus den Löchern wirklich immer die richtige Information über die Symmetrien erhält, konnte bisher nicht bewiesen werden.

In meiner Arbeit habe ich diese starke Version der Korrespondenz für eine ganze Serie weiterer Fälle überprüft, mit dem Ergebnis, dass es auch in diesen Fällen funktioniert. Die Fälle, die ich behandelt habe, sind die „verallgemeinerten Lorentz-Gruppen“. Das heißt, es geht um die Symmetrien in der Raumzeit, die für die Quantenphysik wichtig sind; allerdings sind bei mir beliebig viele Raumdimensionen erlaubt und nicht nur drei.

Literatur

[ABV92] Adams, Jeffrey, Dan Barbasch and David A. Vogan, Jr.: *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, Band 104 der Reihe *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.

[Soe01] Soergel, Wolfgang: *Langlands' philosophy and Koszul duality.* In: *Algebra—representation theory (Constanta, 2000)*, Band 28 der Reihe *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, 379–414. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.